141 - Utilisation des groupes en géométrie.

Une géométrie est la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X. Ces transformations caractérisent la géométrie : c'est le groupe qui fait la géométrie. On va d'abord étudier trois géométries, c'est-à-dire en fait trois groupes de transformations. Dans chaque cas, on va s'intéresser aux invariants, c'est-à-dire de « notions » conservées par le groupe. A noter que souvent, les groupes qui agissent sur l'ensemble ont des « variantes ». Ex : On((R) agit sur R^n, mais on peut aussi faire agir SOn(R). Les invariants seront alors différents.

I) Notions géométriques associées à un groupe

A) Géométrie euclidienne

1) Isométries

On se donne le moyen de mesurer les distances

Déf : isométrie

Déf : espace euclidien

On fait agir O(n) sur les points.

2) Angles

Définition

Les isométries conservent les longueurs, orthogonalité, angles [Kah]

3) Exemple de preuves utilisant les invariants [Kah]

M appartient à la médiatrice ssi AM=MB

B) Géométrie affine [Combes] + [Audin]

1) Espace affine

Déf : un espace affine est un ensemble $\mathcal{E}$ sur lequel le groupe additif (E,+) d'un ev agit à droite, transitivement et librement (stabilisateur trivial). Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés points, ceux de E vecteurs. (M,x)→M+x.

Traduction : pour deux points M et N, il existe (transitivité) un unique (libre) vecteur x tq M=N+x

Ex : (R^n,+,.) un espace vectoriel. (R^n,+) agit à droite sur R^n, librement et transitivement. Il existe donc un espace affine $\mathcal{E}$_R^n dont l'ensemble des points est R^n et pour lequel l'action est t_y(x)=x+y. On l'appelle espace affine canonique, et on le note $\mathcal{E}$n(R).

Espace affine euclidien (dirigé par un espace euclidien).

2) Groupe affine

Application affine : f affine s'il existe et v linéaire tq f(M+x)=f(M)+v(x).

Déf : isomorphisme affine.

Déf : groupe affine : ensemble des automorphismes affines.

Prop : isomorphisme entre GA et produit demi direct

Prop : GA sous forme de matrices

Prop : GA agit sur $\mathcal{E}$ (toujours avec les matrices)

3) Invariants

Alignement, barycentre (vrai pour toutes les géométries qu'on va étudier)

Aire des triangles (semi invariant) [Kah]

Longueur et angles ne sont plus des invariants

4) Exemple de preuves utilisant les invariants [Kah]

M appartient à la médiane d'un triangle ssi Aire(AMB)=Aire(ACM) (dans un espace affine euclidien)

C) Géométrie projective

Birapport, action simplement transitive sur les triplets, pas sur les quadruplets => invariant=birapport

II) Figures : classification et régularisation [Fresnel – Recueil] + [Audin]

1) Classification [Aud]

Conique affines, euclidienne. Dépend de G.

2) Régularisation [Fresnel – Recueil] + [Aud]

Se ramener à une situation plus simple.

Ellipse de Steiner[Fresnel – Recueil], alternative de Steiner [Aud]

Envoi d'un point à l'infini (Pappus projectif, voir [Aud])

III) D'autres liens divers [Combes] + [Szp] + [BR] + [Carrega]

1) Polygones réguliers et groupe O(2) [Szp] + [BR] + [Combes]

Les sous groupes finis de SO(2) sont les groupes de rotation des polygones réguliers. Les sous groupes finis de O(2) sont en plus les groupes diédraux.

2) Polyèdres réguliers et groupe SO(3) [BR] + [Combes]

Isomorphismes, sous groupes finis de SO(3)

3) Constructibilité [Carrega]

Théorème de Wantzel + Théorème de Gauss. Dire que la réciproque de Gauss vient de la correspondance de Galois.

Développements :
Iso+(T) et Iso+(C) [Aless 62] (***)
Ellipse de Steiner [Fresnel – Recueil] (**)

Bibliographie :
Kahane – L'enseignement des sciences mathématiques – Annexe 1
(disponible sur http://ups.prepas.org/maths/kahane/geometrie.pdf)

[Combes] Algèbre et géom
[Szp]
[BR]
[Carrega]
[Fresnel] Recueil d'exercices
[Aud]

Rapport du jury : c'est une leçon transversale et difficile. On ne peut prétendre avoir une bonne note si elle n'est pas préparée.